

## Le problème des modèles nucléaires

- Dans le domaine des réactions nucléaires a été introduit le modèle du puits de potentiel
- La structure du noyau a été, aussi, modélisée. La première idée a été d'introduire un modèle en couches supposant une structure très analogue à celle de l'atome. L'attraction coulombienne du noyau sur un électron est beaucoup plus grande que celle de deux électrons entre eux. En cette conditions les couches électroniques s'édifient dans le champ prédominant du noyau. Dans le noyau on ne peut rien voir de semblable pour les nucléons.

En 1934 a été introduit le modèle en couches du noyau, mais il a été abandonné très vite parce que une objection théorique importante a été posée : des attractions 2 à 2 <sup>point</sup> très fortes entre nucléons dans le noyau, ~~et l'impossibilité de s'édifier~~ donc, n'existe pas la possibilité des couches nucléoniques.

- D'autre part, on a considéré des modèles où un nucléon interagit fortement avec chacun des autres, spécialement avec ses plus proches voisins en raison de la courte portée des forces. Chaque nucléon a un parcours moyen petit devant le rayon nucléaire. Ce sont les modèles à forte interaction.
- Nous avons discuté sur le ~~cas~~ modèle nucléaire de la goutte liquide, développé en connexion avec le modèle du noyau composé, spécifique au domaine des réactions nucléaires.

MEMENTO! Entre ces deux tendances extrêmes et parce qu'aucune ne représentait bien toute la réalité, des modèles intermédiaires ont été développés.

gratire gurite (placi de prindere) conține un aranjament care fixează orientarea fiecărei bare de combustibil în raport cu alte bare de combustibil sau ansambluri.

## CAP. 2 Casete combustibile și bare

Garnitura combustibile de curgere pentru a asigura o suprafață suficientă de curgere a apei de răcire. Captușeala (invelișul exterior) de asemenea conține sus unul sau doi separatori de elemente combustibile sau separatori intermediari cu care mențin distanța între elementele combustibile. Două guri circulare sunt localizate în peretele invelișului exterior fiind realizate în funcție de instalația în care s-a dorit ca acestea să fie utilizate. În capitolul următor vom face o prezentare mai pe larg a elementelor combustibile de tip TRIGA care sunt folosite la dreptunghiulare sunt localizate în peretele mușajului lângă partea I.C.N. Fiecare din ele a fost realizat această lucrare.

Casetă conține 25 de elemente combustibile aranjate într-o matrice patratică (Selemente x Selemente). Elementele combustibile sunt conținute într-un rasteț (armatură) patratic blocat de un obstacol strâns.

Elementele combustibile sunt de 1.38 cm diametru și aproximativ 76.2 cm lungime, cu lungimea activă a combustibilului de 55.3 cm. Fiecare element combustibil este garnituri din partea inferioară și furnizează mijloacele imbracat cu o teacă de incoloy, 800, de grosime 0.016 și convenabile mișcării ansamblului fără a pune încărcătura pe îmbinările sunt facute prin sudură cu arc electric. Acestea sunt de bare individuale.

1. Căptușeala asigură protecția structurală a ansamblurilor care reduce posibilitatea apariției pagubelor. Aceasta lungime este permisă drept o secțiune de curgere dreaptă pentru răcire și permite mișcarea liberă a combustibilului față de teacă. Un arc este instalat pentru a asigura menținerea poziției în interiorul combustibilului, a armaturii pentru scurgerea elementului de răcire în jurul miezului pieselor combustibile. Armaturile inoxidabile din capete sunt complete, astfel permițând flexibilități mari la mărimea și formă miezului.

2. ghidajul asigură protecția structurală a ansamblurilor care reduce posibilitatea apariției pagubelor. Aceasta lungime este permisă drept o secțiune de curgere dreaptă pentru răcire și permite mișcarea liberă a combustibilului față de teacă. Un arc este instalat pentru a asigura menținerea poziției în interiorul combustibilului, a armaturii pentru scurgerea elementului de răcire în jurul miezului pieselor combustibile. Armaturile inoxidabile din capete sunt complete, astfel permițând flexibilități mari la mărimea și formă miezului.

3. Căptușeala include un mușaj de Al în partea inferioară care se fixează într-o placă de prindere. În partea inferioară a mușajului dom de placa de bază, de prindere pentru ansamblul de casete. Maximul suprafeței mușajului din partea inferioară dispozitivul de prindere al ansamblului de combustibili.

conține gratire gurite care determină poziția și mențin distanțarea barelor de combustibil. Fiecare din cele 25 de

ne soumis qu'à un potentiel moyen et à ainsi peu d'interaction directe avec chacun des autres. La probabilité de diffusion de deux nucléons dans le noyau est faible, donc le libre parcours

## Modèles en couches

- La connaissance avec précision des énergies des particules  $\alpha$ , la découverte de leur structure fine, par Rosenblum, et la systématique de ces énergies ~~montre~~ ont montré que le 82<sup>e</sup> proton des noyaux radioactifs  $\alpha$  sont plus liés que les autres, voisins (80<sup>e</sup>, 81<sup>e</sup>, 83<sup>e</sup>, 84<sup>e</sup>); de même pour le 126<sup>e</sup> neutron relativement à ceux de rangs voisins.

D'où l'idée d'un modèle en couches proposé par Zsarsor. Mais, celui-ci ne put trouver les nombres magiques 82 et 126 d'une manière satisfaisante.

Autre auteur de la première variante du modèle en couches a été Wigner

- Aux discontinuités pour les courbes des énergies des particules  $\alpha$  émis par différents noyaux, en fonction de Z ou N ont été ajoutés autres faits expérimentaux qui suggèrent la structure en couches des noyaux. Les faits expérimentaux ont été liés de la radioactivité induite, des désintégrations  $\beta$ , des réactions avec neutrons

- Les plus importants faits expérimentaux sont:

(a) Abondance des éléments et nombre magiques

- abondance relative
- abondance absolue sur terre

(b) Énergies de liaison

(c) plus tard

(c) L'émission retardée de neutrons (1936-1938)

(d) Section efficace d'absorption des neutrons (1939 Griffiths)

(e) Section efficace d'absorption des neutrons (1948 Hughes)

(f) ... derniers niveaux excités des

# Première tentative de modèle en couches du noyau

## Le potentiel moyen

- Les nucléons sont des fermions; ils ont un spin 1/2 et obéissent au principe d'exclusion de Pauli
- La fonction d'onde globale du noyau doit être antisymétrique par rapport à l'échange de 2 nucléons de même nature
- On admet que chaque nucléon du noyau subit une force dérivant d'un potentiel moyen qui représente l'action de tous les autres nucléons sur celui-ci. On considère que ce potentiel moyen a une symétrie sphérique:  $V = V(r)$ . On admet, aussi, que le potentiel  $V(r)$  varie comme la densité nucléaire.

Les expériences de diffusion d'électrons par des noyaux ont montré que la densité protonique varie de la façon suivante (Fig. A). La variation de la densité protonique peut être représentée par la relation:

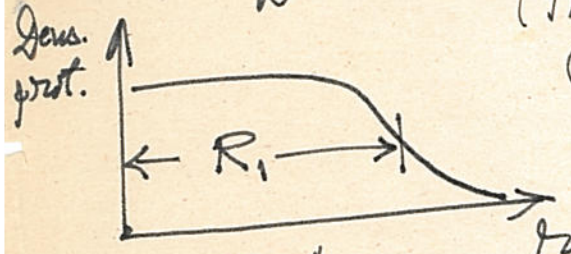


Fig. A.

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \exp[(r - R_1)/a]}$$

avec  $R_1 = r_0^{(1)} A^{1/3}$ ; ou  $r_0^{(1)} = 1.1 \text{ Fm}$ ;  $a = 0.53 \text{ Fm}$

- On fait admettre que la variation de la densité neutronique est sensiblement la même.

Donc 
$$V(r) = \frac{-V_0}{1 + \exp[(r - R_1)/a]}$$

force que les forces nucléaires sont attractives  
- On va la première tentative d'insérer a dans le trou

- Avec l'hypothèse du potentiel moyen, en admettant de plus qu'il n'y a aucun couplage entre spin et moment orbital, la recherche des niveaux nucléaires est analogue à celle de la structure atomique.

On considère des couches constituées chacune par des états d'énergie voisins

- Les nombres quantiques fondamentaux sont, comme dans l'atome

$n$  = nombre quantique radial  $n = 1, 2, \dots$

$l$  = nombre quantique orbital  $l = 0, 1, \dots, n-1$

$m_l$  = nombre quantique magnétique orbital  $|m_l| \leq l$

$m_s$  = nombre quantique magnétique de spin  $m_s = \pm 1/2$

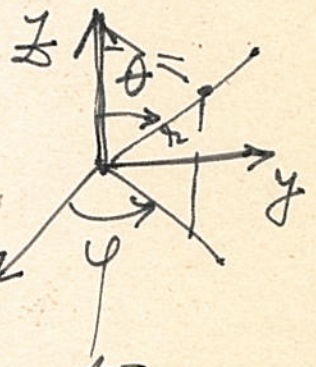
- L'équation de Schrödinger pour un nucléon de masse  $m_N$  est:

$$\left[ -\frac{\hbar^2}{2m_N} \nabla^2 + V(r) \right] \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r})$$

Parce que le potentiel moyen a une symétrie sphérique nous avons, en coordonnées sphériques,

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}$$

$$l(l+1) = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$



- L'équation de Schrödinger devient maintenant:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m_N}{\hbar^2} [E - V(r)] \right\} \psi(r) = 0.$$

l'équation radiale a la forme suivante:

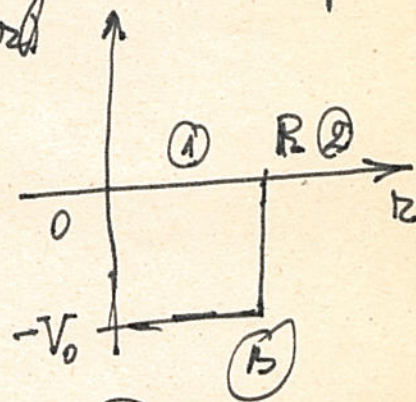
$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] \right\} R(r)$$

Avec un autre ~~le~~ changement de fonction  $u(r) = r \cdot R(r)$  nous avons:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m\mu}{\hbar^2} [E - V(r)] \right\} u(r) = 0$$

- On considère un puits de potentiel rectangulaire à parois finies (Fig. B)

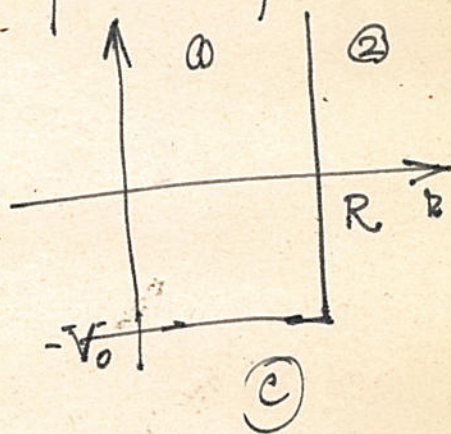
Donc 
$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R \\ 0, & r > R \end{cases}$$



La solution de l'équation radiale aura deux formes:  $u_1(r)$  pour  $r < R$ ,  $u_2(r)$  pour  $r > R$ . Les deux solutions faudrait joindre par des conditions de continuité en  $r = R$

- Le problème se simplifie en prenant des parois infinies. Dans ce cas

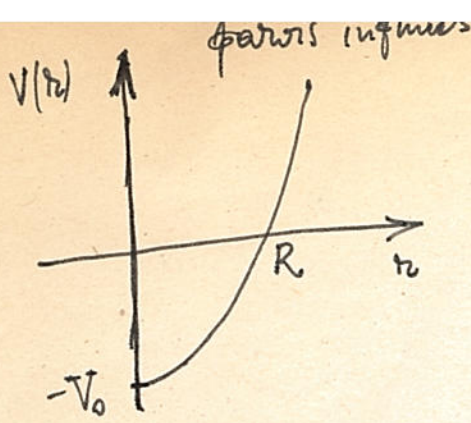
$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < R \\ +\infty, & r > R \end{cases}$$



- La fonction d'onde  $\psi(\vec{r}_i)$  d'un nucléon dans ce potentiel est nulle pour  $r > R$  la particule sera ici toujours liée (les niveaux d'énergie indéfiniment élevés)

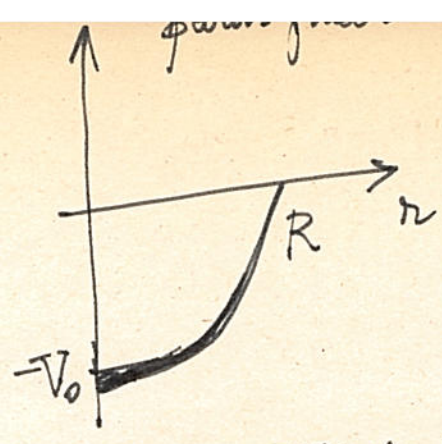
Cette simplification n'entraîne pas des modifications importantes sur les valeurs des niveaux d'énergies les plus bas

- Jusqu'à la seconde guerre mondiale ont été proposés et des puits à parois infinies (B) et à parois



(A)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 [1 - (r/R)^2] & r < R \\ \infty & r > R \end{cases}$$



(B)

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 [1 - (r/R)^2] & r < R \\ 0 & r > R \end{cases}$$

Caractères généraux de la solution

- Pour tous les cas (toutes les formes de potentiel moyen) il faut résoudre l'équation radiale

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m_{\mu}}{\hbar^2} [E - V(r)] \right\} u(r) = 0.$$

- Les solutions dépendent des deux indices:  $l$  et  $m$ ; donc:

$$u(r) = u_{lm}(r)$$

- La fonction propre totale, de trois nombres quantiques  $n, l, m$

$$\Psi(r) = \Psi_{nlm}(r) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_l^m(\theta, \varphi).$$

( $m_s$  est absent parce que l'équation radiale ne dépend pas de  $\sigma_{\mu}$ )

- Pour des potentiels à parois finies il y a discontinuité de  $V(r)$  en  $r=R$ ; Il faut résoudre l'équation dans chacun des deux domaines:  $r < R$  et  $r > R$  et tenir compte des

- Les conditions  $u_1(R) = u_2(R)$  et  $\int |\psi(\vec{r})|^2 d\vec{r} = 1$  (condition de normalisation) déterminent les deux constantes à un facteur de phase près.
- L'autre condition de continuité - sur les dérivées - que l'on peut remplacer par:

$$\frac{1}{u_1} \frac{du_1}{dr} \Big|_{r=R} = \frac{1}{u_2} \frac{du_2}{dr} \Big|_{r=R}$$

jointe aux conditions aux limites, conduira à des niveaux discrets.

- Pour que les solutions soient physiquement acceptables, il faut encore satisfaire aux conditions aux limites suivantes:

$$R(0) = \text{finie} \text{ soit } u_1(0) = 0.$$

$$R(\infty) = 0 \text{ soit } u_2(\infty) = 0.$$

## Solutions

### cas du puits de potentiel rectangulaire

⊕ À parois infinies

$$\boxed{r > R} \Rightarrow u(r) = 0$$

$$\boxed{r < R} \Rightarrow V(r) = -V_0 \Rightarrow \left. \begin{array}{l} u(0) = 0 \\ u(R) = 0 \end{array} \right\} \text{ les conditions aux limites}$$

ⓐ  $l=0 \Rightarrow$  état  $s$

$$\frac{d^2}{dr^2} u + k^2 u = 0.$$

$$\boxed{k^2 = \frac{2m_H(E+V_0)}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow \text{solution } \boxed{u(r) = A \sin kr + B \cos kr}$$

$$u(0) = 0 \Rightarrow B = 0. \Rightarrow |A| \Rightarrow \text{de la condition de normalisation}$$



⇒ les niveaux d'énergie:

X.6.

$$E_{n0} = -V_0 + \frac{\hbar^2 k^2}{2m_H} = -V_0 + \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_H R^2}$$

$n \equiv$  nombre de zéros de la fonction radiale  $u(r)$  entre 0 et l'infini ( $R$ ); le zéro à l'origine et à l'infini sont exclus.

$$\frac{n\pi R}{R} = \pi R \Rightarrow r_2 = \frac{n}{\pi} R \quad \phi = 1, 2, \dots, n$$

- la condition de normalisation:

$$\int_0^R |u(r)|^2 dr = 1$$

$$\int_0^R \left| A \sin \frac{n\pi r}{R} \right|^2 dr = 1 \Rightarrow \boxed{|A|^2 = \frac{2}{R}}$$

ⓑ  $l \neq 0$ ; états: p, d, f, ...

- équation radiale:  $\left[ \frac{d^2}{dr^2} u + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0 \right]$

- équation de Bessel  $\Rightarrow$  solution régulière  $R(r) = u(r)/r$

$$R(r) = N \sqrt{r} j_{l+1/2}(kr) \quad (kr) = N j_l(kr)$$

$N = \text{const.} \Rightarrow$  cond. de normalisation

$$x = kr$$

$$j_l(x) = P_l\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\sin x}{x} + Q_l\left(\frac{1}{x}\right) \frac{\cos x}{x}$$

$P_l =$  polynôme à coefficients réels de degré  $l$

$$Q_l = \frac{1}{x} \frac{1}{x} \frac{1}{x} \dots \frac{1}{x} \quad l-1$$

- Allure générale de  $j_l$ : lorsque  $x$  croît de 0 à  $+\infty$  la fonction commence par croître comme  $x^{l+1}$ , puis de plus

oscille indéfiniment entre deux valeurs extrêmes qui tendent asymptotiquement vers +1 et -1 respectivement. X.7

$l=0 \Rightarrow Q_0=0 \quad P_0=1$   
 $l=1 \Rightarrow Q_1=-1/x \quad P_1=1/x$   
 $l=2 \Rightarrow Q_2=3/x \quad P_2=3/x^2-1$

- La condition aux limites  $u(R)=0$  entraîne  $J_l(kR)=0$   
 - Il faut chercher les valeurs  $x_n$  de  $x$  pour lesquelles  $J_l(x)$  s'annule  $\Rightarrow J_l(x_n)=0$ . Il équivaut à

$$J_l(x_n) = -\frac{Q_l(1/x_n)}{P_l(1/x_n)}$$

$\Rightarrow$  la détermination graphique des valeurs  $x_n$  pour chaque valeur de  $l$

l=1

tg  $x_{n1} = x_{n1}$   
 $\Rightarrow$  les valeurs de  $x_{n1}$  sont déterminées par l'intersection des courbes tg  $x$  et  $y=x$  (Fig. ⊕)

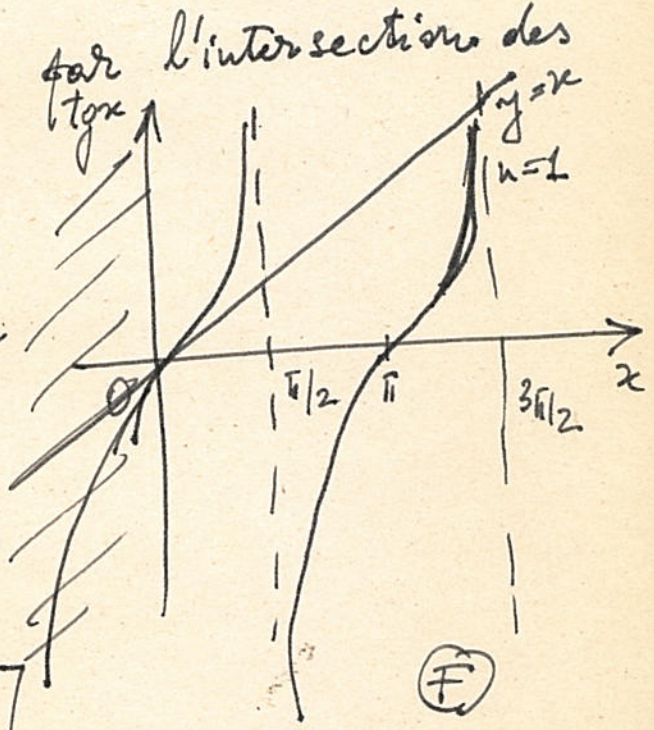
$x=0 \Rightarrow$  solution rejetée

$x_{n1} \Rightarrow k = \frac{x_{n1}}{R} \Rightarrow$  les niveaux d'énergie

$$E_{n1} = -V_0 + \frac{\hbar^2}{2mR^2} x_{n1}^2$$

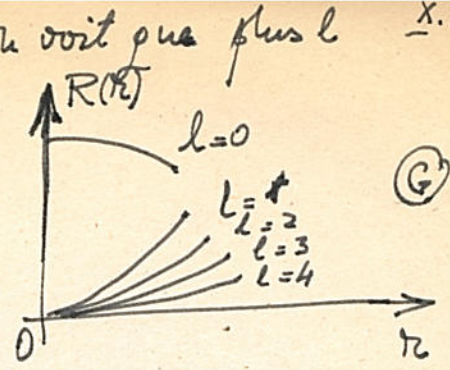
$x \gg 1 \Rightarrow x_{n1} \approx \pi(n+1/2)$

$$\Rightarrow E_{n1} \approx -V_0 + \frac{\hbar^2}{2mR^2} \pi^2 (n+1/2)^2$$



Remarques ①  $n$  représente toujours le nombre de zéros de  $R_n(x)$  entre  $x=0$  et  $R$   $\Rightarrow J_l(kr) = J_l(\frac{x_{nl}r}{R})$  s'annule pour  $\frac{r}{R} = \frac{x_{nl}}{R} \quad \phi = 1, 2, \dots, n$

② À l'origine  $\rho(r)$  se comporte comme  $r^l$ . On voit que plus  $l$  est grand, c'est-à-dire plus le moment orbital est grand, plus la particule a des chances de se trouver loin du centre (effet centrifuge)  $\Rightarrow$  ceci est un résultat général indépendant de la forme de  $V(r)$

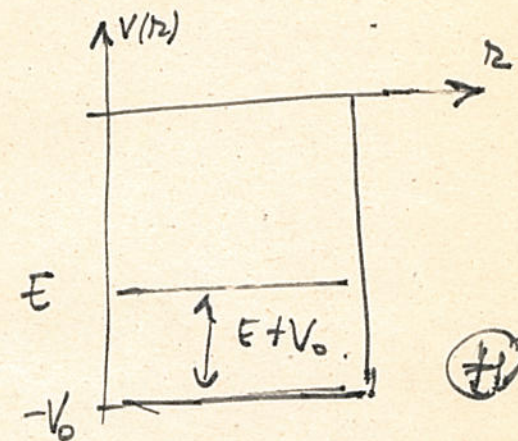


$N = n + l =$  nombre total de zéros

⑥ Puits à parois finies

$r < R \Rightarrow V = -V_0 \Rightarrow$  l'équation:

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0.$$



La solution:

$$u_{nl}(r) = r \cdot N_{nl} \cdot j_l(kr)$$

$$r > R, V=0 \Rightarrow \frac{d^2 u}{dr^2} + \left[ -\alpha^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right] u = 0.$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{-2m_n E}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m_n |E|}}{\hbar}$$

⑦  $l=0 \Rightarrow$  état s

$$r < R: u_1 = A \sin kr$$

$$r > R: u_2 = C e^{-\alpha r} + D e^{\alpha r}$$

$$u_2(\infty) = 0 \Rightarrow D = 0.$$

$$u_1(R) = u_2(R) \Rightarrow A \sin kR = C e^{-\alpha R}$$

La condition de continuité pour la dérivée logarithmique:

$$KR = \chi_{n0}$$

$$\cot \chi_{n0} = -\alpha R / \chi_{n0}$$

$$\operatorname{tg} \chi_{n0} = -\chi_{n0} / \alpha R$$

$$\Rightarrow \alpha^2 R^2 = \frac{2m\mu|E|}{\hbar^2} R^2 =$$

$$= \frac{2m\mu V_0}{\hbar^2} R^2 - \frac{2m\mu(E+V_0)}{\hbar^2} R^2$$

$$\alpha^2 R^2 = \chi_0^2 - \chi_{n0}^2$$

$$\text{en posant } \chi_0^2 \equiv \frac{2m\mu V_0}{\hbar^2} R^2$$

- L'équation à résoudre :

$$\operatorname{tg} \chi_{n0} = -\frac{\chi_{n0}}{\sqrt{\chi_0^2 - \chi_{n0}^2}}$$

$\Rightarrow$  détermination graphique des valeurs  $\chi_{n0}$  (et à  $\infty$ )

(n) ne peut pas dépasser une valeur maximum : comme l'on recherche les états liés seulement,  $E$  est négatif, donc

$$0 < \chi_{n0} < \chi_0$$

$\Rightarrow$  les niveaux d'énergie  $E_{n0} = -\frac{\hbar^2}{2m\mu R^2} (\chi_0^2 - \chi_{n0}^2)$

$$u_1(r) = A \sin\left(\chi_{n0} \frac{r}{R}\right)$$

$$u_2(r) = A \sin KR \cdot \exp\left(\sqrt{\chi_0^2 - \chi_{n0}^2}\right) \cdot \exp\left[-\left(\chi_0^2 - \chi_{n0}^2\right)^{1/2} \frac{r}{R}\right]$$

$$\int_0^R |u_1|^2 dr + \int_R^\infty |u_2|^2 dr = 1$$

$$\boxed{h \neq 0}$$

$$r_2 < R \quad u_1(r_2) = C \cdot r_2 \operatorname{J}_l(kr_2)$$

$$r_2 > R \quad u_2(r_2) = D r_2 \operatorname{h}_l^{(+)}(i\alpha r_2)$$

$\operatorname{h}_l^{(+)}$  = fonction liée à la fonction de Hankel  $H_l^{(+)}$

Ordre de grandeur des intervalles d'énergie entre niveaux x. lo.  
 $\hbar=1$ ;  $c=1$ ;  $m_e=1 \Rightarrow$  système d'unités relativiste universel  
 $m_e c^2 = 511 \text{ keV}$

$$\frac{\hbar}{m_e c} = 3.85 \times 10^{-11} \text{ m}$$

$$\frac{\hbar}{2m_H R^2} \equiv \Delta E$$

$$R = r_0 A^{1/3} = 3.12 \cdot 10^{-3} A^{1/3} \text{ u.r.} \\ 1.2 \cdot 10^{-13} A^{1/3} \text{ cm}$$

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2m_H R^2} = \frac{1}{2.1836 \cdot (3.12 \cdot 10^{-3})^2} A^{-2/3} \approx 28 A^{-2/3} \text{ u.r.}$$

$$\Delta E = 14.3 A^{-2/3} \text{ MeV.}$$

$$A = 125 \quad \Delta E = 0.57 \text{ MeV}$$

$$A = 27 \quad \Delta E = 1.59 \text{ MeV.}$$

# Modèles en couches

①

## L'interaction spin-orbite

⇒ 1946 - sur la suggestion de

- pour essayer d'expliquer les "nombres magiques" ⇒ Fermi ⇒ Maxd. Gerson, Suess (Heidelberg)

Maria Goeppert-Mayer (Chicago)

- chaque niveau  $(n, l)$  est séparé en deux niveaux  $j = l - \frac{1}{2}$ ,  $j = l + \frac{1}{2}$ . ( $l \neq 0$ )  
 $j = l + \frac{1}{2}$  est le niveau le plus profond

- pour un potentiel moyen intermédiaire entre le potentiel de l'oscillateur harmonique et le potentiel de puits rectangulaire, avec une ~~interaction~~ interaction spin-orbite

En remplissant les niveaux dans l'ordre obtenu on retrouve tous les nombres magiques.

- chaque fois que l'on atteint un nombre magique on dit qu'une couche est complète

- Les niveaux individuels ( $n, l, j$ ) intermédiaires sont souvent appelés "sous-couches"

- On suppose que les écarts d'énergie entre la dernière sous-couche d'une couche et la première sous-couche de la suivante sont supérieurs aux écarts entre les niveaux d'une même couche.

⇒ ceci implique une forte interaction spin-orbite

$l > 3 \Rightarrow (n, l, j = l + \frac{1}{2})$  - le dernier d'une couche  
 $(n, l, j = l - \frac{1}{2})$  - le premier de la suivante

- le problème de l'origine de l'interaction spin-orbite dans l'atome est bien connue

Mais si l'on prend:  $H = H_0 + f(\vec{r}) \vec{L} \cdot \vec{S}$

le calcul est le même

$\vec{r} \rightarrow f(\vec{r})$   
 $m_0 \rightarrow M_H$

⇒  $M_H$  est connue empiriquement (ses propriétés sont tirées des données expérimentales). En première approximation on pourra chercher

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M_H}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - \frac{\hbar}{2} \left( f(f+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right) \right] \right\} u = 0 \quad (**)$$

ne diffère de celle que l'on a avec  $H_0$  seul que par le terme constant

$$\frac{\hbar}{2} \left[ f(f+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]$$

Soit  $E_{nl}$  une valeur propre de  $H_0$  associée à  $u_{nl}(r)$

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M_H}{\hbar^2} [E_{nl} - V(r)] \right\} u_{nl}(r) = 0$$

L'eq. (\*\*) est satisfaite avec  $u = u_{nl}(r)$   $\forall f$

$$E - \frac{\hbar}{2} \left[ f(f+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right] = E_{nl}$$

$\Rightarrow$  la fonction d'onde est donc la même pour les deux niveaux ( $nl, f$ ) dont les énergies sont données par les deux niveaux.

$$E_{nl, f} = E_{nl} + \frac{\hbar}{2} \left[ f(f+1) - l(l+1) - \frac{3}{4} \right]$$

$$f = l - \frac{1}{2}$$

$$f = l + \frac{1}{2}$$

$$E_{nl, f} = E_{nl} - \frac{\hbar}{2} (l+1)$$

$$E_{nl, f} = E_{nl} + \frac{\hbar}{2} l$$

$\Rightarrow$  est plus profond - en accord avec des expériences - pour  $f < 0$ .

La distance entre les deux niveaux est, en valeur absolue:

$$\Delta_{nl} = \frac{\hbar}{2} (2l+1)$$

Elle doit croître avec  $l$ , ce qui semble en bon accord avec l'expérience.

$$1g_{9/2} - 1g_{7/2}$$

$$1h_{11/2} - 1h_{9/2}$$

$$\Delta_l \approx 3 \text{ MeV} \Rightarrow \hbar \approx 0.6 \text{ MeV}$$

$\Rightarrow$  tabel Klinkenberg - Rev. Mod. Phys. 24 (1952) 63  $\Rightarrow$   $\Delta E \approx \hbar \omega$

$M, Z > 50 \Rightarrow$  différentes  $f$  et  $l$

Les prévisions du modèle en couches de  
Högnert-Mayer, Jensen, Haaxel et Suess

États des moment angulaire et parité d'un niveau nucléaire.

Limitation des états par le principe d'exclusion.

(a) niveau nucléaire fondamental - obtenu en remplissant un certain nombre de sous-couche "n, l" en n et p, puis on aura une sous-couche "superficielle" niveaux nucléaires excités incomplète en neutrons, une autre incomplète en protons. Niveaux nucléaires excités ⇒ des sous-couche profondes peuvent être incomplètes.

(les nucléons de ces sous-couche incomplètes sont passés sur d'autres plus élevées).

- Dans un modèle à particules rigoureusement indépendantes, comme celui considéré ici, la valeur de l'énergie d'un niveau nucléaire est la somme des énergies des états individuels remplis:

$$E = \sum_{i=1}^A E(n_i l_i j_i)$$

plusieurs (n\_i l\_i j\_i) peuvent être les mêmes

- La fonction d'onde → somme de produits des fonctions d'ondes individuelles:

Produit: 
$$\Psi = \Psi(n_1 l_1 j_1; \vec{r}_1) \dots \Psi(n_A l_A j_A; \vec{r}_A)$$

Tenant compte de l'antisymentrie ⇒ le produit doit être antisymétrisé sur les coordonnées des protons et celles des neutrons.

$$\vec{r}_i \rightarrow -\vec{r}_i \quad i=1, \dots, A$$
$$\Rightarrow \Psi(-\vec{r}_i) = (-1)^{l_1} (-1)^{l_2} \dots (-1)^{l_A} = (-1)^{\sum l_i} \Psi(\vec{r}_i)$$

→ la parité du niveau → définie sans ambiguïté.

- couche complète → contribution à parité par le facteur  $(-1)^{(2j+1)l}$   
 $2j+1 =$  entier pair ( $2j =$  entier impair) ⇒  $(-1)^{(2j+1)l} = +1$  ⇒ il n'est pas utile de compter les couches complètes



- Cas d'une particule à spin  $1/2 \Rightarrow$  fonction d'onde est un spinor, à deux composantes ( $\psi_1, \psi_2$ ). (A)

- Si l'hamiltonien ne dépend que de la position

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r)$$

$\Rightarrow$  2 équations aux valeurs propres qui sont découplées:

$$H\psi_1 = E\psi_1$$

$$H\psi_2 = E\psi_2$$

$\Rightarrow$  solutions

$$\psi_1 = u_1 \varphi(\vec{r})$$

$$\psi_2 = u_2 \varphi(\vec{r})$$

- La condition de normalisation

$$\int (|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2) dV = 1$$

$$\text{Si } \int |\varphi(\vec{r})|^2 dV = 1 \Rightarrow |u_1|^2 + |u_2|^2 = 1$$

$u_1, u_2$  ont un rapport arbitraire; donc, la direction du spin est arbitraire

L'interaction spin-orbite - cas de l'atome

$$H = H_0 + \xi(r) \vec{l} \cdot \vec{s}$$

Montrons que:

$$[H, l_z] \neq 0 \Rightarrow [H, \vec{l}] \neq 0$$

$$[H, s_z] \neq 0 \Rightarrow [H, \vec{s}] \neq 0$$

Mais  $[H, j_z] = 0$  et  $[H, \vec{j}] = 0$ . Ici  $j_z = l_z + s_z$  et  $\vec{j} = \vec{l} + \vec{s}$

(état (relations de commutation des moment cinétique)).

$$\Rightarrow [H, (j)^2] = 0$$

- La commutation de  $H$  et  $\vec{j}$  se déduit aussi de l'invariance par rotation

$\psi$  est un spinor n'est pas un scalaire  $\Rightarrow$

$$\text{L'équation: } H(x_i, p_i, s_i) \psi = E \psi$$

$$\text{est invariante par rotation si } H(x'_i, p'_i, s'_i) \psi' = E \psi'$$

Pour une rotation de autour de  $Ox_3$ :

$$\psi'(x_i) = (1 + i\alpha\sigma_z)\psi(x_i)$$

Donc  $[H, \sigma_z] = 0$ ,  $[H, \vec{p}] = 0$  pour un  $H$  quelconque invariant par rotation

La définition est satisfaisante pour

$$[H_0(x_i, p_i) + \sum (\vec{r}) \cdot \vec{p}] \psi = E \psi$$

$$\Rightarrow \varphi^\dagger [H_0(\vec{r}, \vec{p}) + \sum (\vec{r}') \cdot \vec{p}'] \psi = E \psi + \psi \quad (*)$$

$\varphi^\dagger =$  spinuer arbitraire

- Pour la transformation d'axes on a:

$$H_0(x_i, p_i) = H_0(x_i', p_i')$$

et puisque  $\varphi^\dagger \psi$  est invariant nous avons:

$$\varphi^\dagger H_0(x_i, p_i) \psi = \varphi'^\dagger H_0(x_i', p_i') \psi'$$

$$\text{tandis que } \varphi^\dagger \vec{L} \psi = \varphi'^\dagger \vec{L}' \psi'$$

$$\Rightarrow \sum_f (\varphi^\dagger \vec{L} \cdot \vec{f}) (\vec{f}' \psi')$$

où chacun des facteurs se comporte comme un vecteur dans la transformation. ~~(\*)~~ Eq. (\*) s'écrit:

$$\varphi'^\dagger [H_0(x_i', p_i') + \sum (\vec{r}') \cdot \vec{p}'] = E \varphi'^\dagger \psi'$$

Pour  $\varphi'$  arbitraire nous avons:

$$[H_0(x_i', p_i') + \sum (\vec{r}') \cdot \vec{p}'] = E \psi'$$

Conclusion

Pour vérifier l'invariance par rotation il suffit donc d'examiner les expressions comme si les opérateurs  $\vec{r}$ ,  $\vec{p}$ ,  $\vec{L}$ ,  $\vec{S}$  étaient des vecteurs normaux

tenant compte de l'addition des moments angulaires les fonctions propres cherchées sont de la forme:

$$\psi_{l, m}^{\mu}(r, \theta, \varphi) = R(r) \sum_{m_1, m_2} \langle l, m_1, s, m_2 | j, m \rangle Y_l^{m_1}(\theta, \varphi) \chi_s^{m_2} \equiv R(r) Y_{j, s}^{\mu}(l, m, \theta, \varphi)$$

$\langle l, m_1, s, m_2 | j, m \rangle =$  coefficients de Clebsch-Gordan  $\Rightarrow$  réalisent le couplage de  $l$  et  $s = 1/2$

$\chi_s^{m_s}$  - vecteurs propres de  $(\hat{S})^2$ , pour  $s = 1/2$

$$\chi_{m_s = 1/2}^{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \chi_{m_s = -1/2}^{\beta} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il n'est pas nécessaire de connaître ces expressions des coeff Clebsch-Gordan pour trouver les valeurs propres de  $\hat{H}$

$$|\vec{J}|^2 = |\vec{L}|^2 + |\vec{S}|^2 + 2\vec{L} \cdot \vec{S}$$

$\psi_{l, m}^{\mu} \Rightarrow$  valeurs

$$\frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] ; \text{ puisque } \Delta(l+1) = \frac{3}{4}$$

$$\hat{H}\psi = \psi H_0 + \frac{1}{2} \zeta(r) [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] \psi$$

$$H\psi = \psi \left[ -\frac{\hbar^2}{2m_0} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) + \frac{1}{2} \zeta(r) [j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4}] \right] \psi$$

$H\psi = E\psi \Rightarrow$  eq. radiale

$$u(r) = r \cdot R(r)$$

$$\psi \left[ \frac{d^2}{dr^2} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m_0}{\hbar^2} [E - V(r) - \frac{1}{2} \zeta(r) (j(j+1) - l(l+1) - \frac{3}{4})] \right] u = 0$$

Les valeurs propres et solutions propres de cette équation dépendent des valeurs de  $l$  et  $j$ , non celles de  $m \Rightarrow$  les valeurs propres  $E_{l, j}$  sont dégénérées d'ordre  $2j+1$  en  $m$

$\rightarrow$  Pour les états liés elles sont obtenues par la condition que  $u_{l, j}(r) \leq 0$  pour  $r=0$ ;  $r \rightarrow \infty$  est définie uniformément pour  $r$ .

- Les fonctions propres de  $H$  correspondantes sont:

$$\psi_{nlm}(\vec{r}) = \frac{u_{nl}(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \varphi)$$

$\Rightarrow$  le niveau d'énergie  $E(n, l)$  que l'on avait avec l'Hamiltonien  $H_0$ , se trouve en général ( $l \neq 0$ ) dédoublé en 2 niveaux  $E(n, l, j = l - 1/2)$  et  $E(n, l, j = l + 1/2)$  lorsque  $H$  comporte le couplage spin-orbite.

Les  $2(2l+1)$  sous-états magnétiques confondus avec  $E(n, l)$  se trouvent alors séparés en

$$2j+1 \text{ avec } j = l - 1/2 \quad (2l) \quad E = E(n, l, j = l - 1/2)$$

$$2j+1 \text{ avec } j = l + 1/2 \quad (2l+2) \quad E = E(n, l, j = l + 1/2)$$



Avec les électrons atomiques le couplage spin-orbite est important pour les électrons profonds (K, L) des métaux moyens et lourds, dont la vitesse moyenne est grande.

$\Rightarrow j = l - 1/2, j = l + 1/2 \Rightarrow X$  (raisons)  
 $j = l - 1/2$  plus bas que  $j = l + 1/2$  (presque toujours)